Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

Tema A - 09/06/2021
Tempo a disposizione: 2h 30min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova e prima del termine del termine della stessa.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

Ulteriori indicazioni per chi fa l'esame in via telematica:

- La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $\quad y' = \dfrac{xy^3}{2\sqrt{1+x^2}}$

1.2 Trovare le soluzioni che soddisfano le seguenti condizioni iniziali e determinarne il dominio di esistenza:

(a) $\quad y(0) = -1$ $\qquad\qquad$ (b) $\quad y(0) = 0$

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = (\quad t \quad , -\cos(t)+1)\,, & \text{se } t \in [0\ ,\ 4\pi]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = (8\pi - t,\ \ \cos(t)-1)\,, & \text{se } t \in\,]4\pi\ ,\ 8\pi] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

2.2 Determinare il supporto della curva e disegnarlo. Indicare il verso di percorrenza.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = \pi$.

2.4 Calcolare il lavoro su γ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (2x+y\ ,\ x)$.

Problema 3 (9 punti)

Sia $\quad f(x,y) = \log(x^2+4y^2+2x) - x$ (dove il logaritmo è in base naturale).

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $y = 0$.

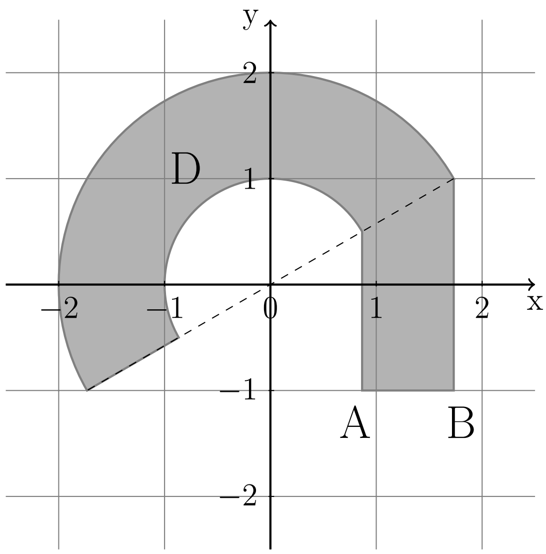
3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(0,1)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove le curve alla frontiera sono due archi di circonferenza di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 2; i vertici A e B hanno coordinate $A = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$, $B = (\sqrt{3}, -1)$. Utilizzare gli integrali doppi per calcolare

$$I_1 = \int\!\!\int_D dxdy \quad ; \quad I_2 = \int\!\!\int_D xy\,dxdy$$



Soluzioni

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $\quad y' = \dfrac{xy^3}{2\sqrt{1+x^2}}$

L'equazione differenziale è del primo ordine a variabili separabili.

Si nota che $y = 0$ è soluzione costante.

Assumiamo $y \neq 0$, allora possiamo separare le variabili:

$$\int \frac{1}{y^3}\, dy = \int \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}\, dx$$
$$-\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$|y| = \frac{1}{\sqrt{-2c - \sqrt{1+x^2}}}$$
$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{-2c - \sqrt{1+x^2}}}$$

L'integrale generale è dato dalla soluzione costante $y = 0$ e dalle soluzioni del tipo:

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{-2c - \sqrt{1+x^2}}}$$

dove la costante c va determinata in base alla condizione iniziale.

1.2 Trovare le soluzioni che soddisfano le seguenti condizioni iniziali e determinarne il dominio di esistenza:

(a) $\quad y(0) = -1$ (b) $\quad y(0) = 0$

(a) $y(0) = -1$. Bisogna imporre $-1 = -\dfrac{1}{\sqrt{-2c-1}}$ da cui $c = -1$ e la soluzione è:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{1+x^2}}}$$

con dominio $2 > \sqrt{1+x^2} \implies -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

(b) $y(1) = 0$. Bisogna ricordarsi che $y = 0$ è soluzione constante.Dominio: $\mathbb{R}$.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = (\quad t \quad , -\cos(t)+1)\,, & \text{se } t \in [0\ ,\ 4\pi]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = (8\pi - t, \ \ \cos(t)-1)\,, & \text{se } t \in]4\pi\ ,\ 8\pi] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

$\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono continue. Inoltre

$$\mathbf{r}_1(4\pi) = (4\pi, 0) = \mathbf{r}_2(4\pi)$$

quindi anche γ è continua.

Si ha $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1(0) = (0,0)$ e $\mathbf{r}(8\pi) = \mathbf{r}_2(8\pi) = (0,0)$, quindi γ è chiusa.

Per la semplicità, dalla componente x delle due parametrizzazioni si vede direttamente che

$$\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}_1(t_2) \implies t_1 = t_2$$

e

$$\mathbf{r}_2(t_1) = \mathbf{r}_2(t_2) \implies t_1 = t_2$$

Quindi $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono semplici. Bisogna però capire se ci sono dei valori $t_1 \in [0, 4\pi]$ e $t_2 \in]4\pi, 8\pi]$ per cui $\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}_2(t_2)$.

Dalla componente x otteniamo $t_1 = 8\pi - t_2$ che sostituito nella componente y dà:

$$-\cos(8\pi - t_2) + 1 = \cos(t_2) - 1 \implies 2\cos(t_2) = 2$$

dove si è usata la periodicità del coseno. Le soluzioni in $]4\pi, 8\pi]$ sono $t_2 = 6\pi$ e $t_2 = 8\pi$, a cui corrispondono i valori $t_1 = 2\pi$ e $t_1 = 0$.

Si è trovato che prendendo $t_1 = 2\pi$ e $t_2 = 6\pi$ si ha $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, quindi la parametrizzazione NON è semplice.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente a $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_1'(t) = (1, \sin(t))$ e a $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_2'(t) = (-1, -\sin(t))$. La prima componente di entrambi i vettori tangenti non si annulla mai, quindi $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono regolari.

Per capire se $\mathbf{r}(t)$ è regolare, bisogna analizzare cosa succede in $t = 4\pi$: la derivata prima passa da $\mathbf{r}_1'(4\pi) = (1,0)$ a $\mathbf{r}_2(4\pi) = (-1,0)$, quindi il vettore tangente a γ non è definito in $t = 4\pi$, e *gamma* è regolare a tratti.

2.2 Determinare il supporto della curva e disegnarlo. Indicare il verso di percorrenza.

$\mathbf{r}_1(t)$ è il grafico della funzione $y = -\cos(x) + 1$ percorso da $x = 0$ a $x = 4\pi$.

$\mathbf{r}_2(t)$ è il grafico della funzione $y = \cos(x) - 1$ percorso da $x = 4\pi$ a $x = 0$.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = \pi$.

Si ha $\mathbf{r}(\pi) = (\pi, 2)$ e $\mathbf{r}'(\pi) = (1, 0)$. Quindi un'eq. della retta tangente è:

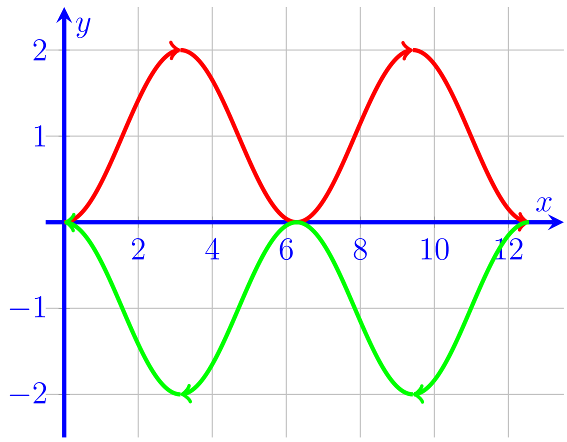


Figura 1: Supporto della curva parametrica ($\mathbf{r}_1$ in rosso e $\mathbf{r}_2$ in verde).

$$\begin{cases} x(t) = t \in \mathbb{R} \\ y(t) = 2 \end{cases}$$

L'equazione cartesiana è $y = 2$.

2.4 Calcolare il lavoro su γ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y\ ,\ x)$.

Il campo vettoriale è conservativo con potenziale $U(x, y) = x^2 + xy$. Siccome γ è una curva chiusa, e $\mathbf{F}$ conservativo, l'integrale è nullo.

Si può verificare anche integrando:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = & \int_0^{4\pi} (2t - \cos(t) + 1, t) \cdot (1, \sin(t))dt + \\
& + \int_{4\pi}^{8\pi} (16\pi - 2t + \cos(t) - 1, 8\pi - t) \cdot (-1, -\sin(t))dt = \\
= & \int_0^{4\pi} (2t - \cos(t) + 1 + t\sin(t))dt + \\
& + \int_{4\pi}^{8\pi} -16\pi + 2t - \cos(t) + 1 - 8\pi\sin(t) + t\sin(t)dt = \\
= & [t^2 + t - t\cos(t)]_0^{4\pi} + [-16\pi t + t^2 + t + 8\pi\cos(t) - t\cos(t)]_{4\pi}^{8\pi} = \\
= & 16\pi^2 + 4\pi - 4\pi + 0 + \\
& - 16 * 8\pi^2 + 8^2\pi^2 + 8\pi + 8\pi - 8\pi + 16 * 4\pi^2 - 16\pi^2 - 4\pi - 8\pi + 4\pi = 0
\end{aligned}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $\quad f(x, y) = \log(x^2 + 4y^2 + 2x) - x$ (dove il logaritmo è in base naturale).

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $y = 0$.

Per il dominio dobbiamo imporre

$$x^2 + 4y^2 + 2x > 0 \implies (x+1)^2 + 4y^2 > 1$$

Il dominio di f è $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + 4y^2 > 1\}$ che rappresenta la porzione di piano al di fuori dell'ellisse di centro $(-1,0)$ e $a = 1$ (semiasse x), $b = 1/2$ (semiasse y) La funzione è $\mathcal{C}^2(D_f)$ perché somma e composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ (anche $\mathcal{C}^\infty$).

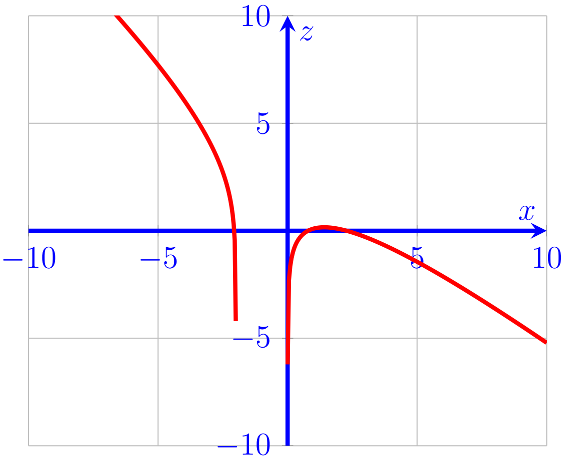


Figura 2: Sezione $y = 0$, $z = \log(x^2 + 2x) - x$

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x+2}{x^2+4y^2+2x} - 1 \\ \dfrac{8y}{x^2+4y^2+2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2-x^2-4y^2}{x^2+4y^2+2x} \\ \dfrac{8y}{x^2+4y^2+2x} \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x,y) = (0,0)$ si ottiene dalla seconda equazione $y = 0$. Sostituendo nella prima equazione si ha la condizione:

$$2 - x^2 = 0$$

che è soddisfatta per $x = \pm\sqrt{2}$. Si nota che il punto $(-\sqrt{2}, 0)$ non è accettabile perché al di fuori del dominio. Quindi si ha un unico punto critico:

$$P_1 = (-\sqrt{2}, 0)$$

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tale punto. In un punto (x,y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2(x^2+4y^2+2x)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+4y^2+2x)^2} & \dfrac{-(2x+2)(8y)}{(x^2+4y^2+2x)^2} \\ \dfrac{-(2x+2)(8y)}{(x^2+4y^2+2x)^2} & \dfrac{8(x^2+4y^2+2x)-(8y)(8y)}{(x^2+4y^2+2x)^2} \end{pmatrix}$$

- P_1: $H_f(\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} \dfrac{-2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{8}{2+2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $\det(H_f(\sqrt{2},0)) < 0$ quindi H_f è indefinita in P_1 e P_1 è punto di sella.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(0,1)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto.

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{4}-1 \\ \frac{8}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\nabla f(0,1)\| = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Quindi il versore di massima crescita in $(0,1)$ è:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

Lo sviluppo di Taylor del primo ordine in $(0,1)$ è

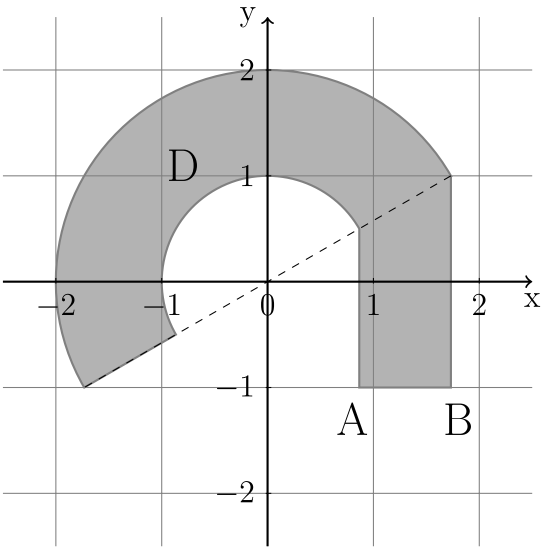
$$T_1(x,y) = \log(4) - \frac{1}{2}x + 2(y-1)$$

.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove le curve alla frontiera sono due archi di circonferenza di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 2; i vertici A e B hanno coordinate $A = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -1)$, $B = (\sqrt{3}, -1)$. Utilizzare gli integrali doppi per calcolare

$$I_1 = \int\int_D dxdy \quad ; \quad I_2 = \int\int_D xy\, dxdy$$



Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \cup D_2$ con:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta),\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{7}{6}\pi, 1 \leq \rho \leq 2\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{3}/2 \leq x \leq \sqrt{3}, -1 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy + \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_{\pi/6}^{7\pi/6}\left(\int_1^2 \rho\,d\rho\right)d\theta = \pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}}\left(\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} 1\,dy\right)dx = \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1\,dy = [\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + x]_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}} = \frac{7}{8}\sqrt{3}$$

Quindi l'area di D vale $\frac{7}{8}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\pi$.
Per il calcolo del secondo integrale calcoliamo $\int\int_{D_1} xy\,dx\,dy$ e $\int\int_{D_2} xy\,dx\,dy$:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1} xy\,dx\,dy &= \int_{\pi/6}^{7\pi/6}\left(\int_1^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\rho^3\,d\rho\right)d\theta \\ &= \left(\int_{\pi/6}^{7\pi/6}\frac{\sin(2\theta)}{2}\,d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^3\,d\rho\right) \\ &= \left[-\frac{\cos(2\theta)}{4}\right]_{\pi/6}^{7\pi/6}[\rho^4/4]_1^2 = (-\frac{1}{8}+\frac{1}{8})(4-1/4) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2} xy\,dx\,dy &= \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}}\left(\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} xy\,dy\right)dx = \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}}\left(x[\frac{y^2}{2}]_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x}\right)dx = \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}}\frac{x^3}{6} - \frac{x}{2}\,dx = \\ &= [\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{4}]_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}} = \frac{9}{24} - \frac{3}{4} - \frac{9}{24*16} + \frac{3}{16} = -\frac{27}{128}\end{aligned}$$